Ex.14 设A, B 是同阶的方阵, B 可逆且满足

$$A^2 + AB + B^2 = 0.$$

证明: $A, A+B$ 及$A^{-1} + B^{-1}$ 都是可逆矩阵.

证明. 因为B 可逆, 所以, $|B| \neq 0$, 从而, $|B^2| \neq 0$. 由$A^2 + AB + B^2 = 0$ 得

$$A(A+B) = -B^2.$$

于是,

$$|A| \cdot |A+B| = |A(A+B)| = |-B^2| \neq 0.$$

所以, $|A| \neq 0$, $|A+B| \neq 0$, 即$A, A+B$ 都可逆. 又

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}.$$

由A^{-1}, $A+B$, B^{-1} 可逆知$A^{-1} + B^{-1}$ 是可逆矩阵.